طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً باستخدام الفروق النهائية المدمجة لحل معادلة الموجة

غـــــادة صـــالح اشــتيوي
قســم الرياضـــيات ، كلــية العــلوم ، جــامعة مصــراته
g.eshtewi@sci.misuratau.edu.ly

تاريخ الاستلام: 25- 6- 2021 تاريخ القبول: 03- 07-2021 تاريخ النشر: 01- 10- 2021

الملخص :

في هذه الورقة يتم دراسة طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً ADI (Alternating Direction Implicit) باستخدام فكرة تقسيم المشتقة بالنسبة للمتغير الزمني في معادلة الموجة ثنائية البعد، وتطوير هذه الطريقة عن طريق تقريب المشتقة الثانية بالنسبة للمتغير الفضائي باستخدام الفـروق النهائية المدمجة (Compact finite difference) من الرتبة الرابعة، كذلك يمكن تعميم كل من الطريقتين على معادلة الموجة ثلاثية البعد، وأخيراً قدمنا الأمثلة العددية حيث كانت النتائج المتحصل عليها ذات دقة جيدة بالمقارنة مع الحل الفعلي، ومقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج طريقتي ليزي الأولى والثانية وطريقة الاتجاهات المتبادلة المعممة .

الكلمات المفتاحية : الاتجاهات المتبادلة ضمنياً - الفروق النهائية المدمجة – معادلة الموجة .

1- المقـــــــدمــــــــــة :

نناقش في هذه الورقة الحل العددي لمعادلة الموجة في بعدين مع شرطين ابتدائيين وأربع شروط حدية على المنطقة $\Omega = [a,b]^2$ والتي تكون على الصورة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \qquad , \ a < x,y < b \ \ , t > 0 \qquad (1.1)$$

الشروط الحدية :

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x(a,y,t) + \beta_1 u(a,y,t) &= f_1(y,t) \\ \alpha_2 u_x(b,y,t) + \beta_2 u(b,y,t) &= f_2(y,t) \\ \alpha_3 u_x(x,a,t) + \beta_3 u(x,a,t) &= g_1(x,t) \\ \alpha_4 u_x(x,b,t) + \beta_4 u(x,b,t) &= g_2(x,t) \end{aligned} \qquad (x,y) \in \Omega \, , t \geq 0$$

والشرطين الابتدائيين :

$$\begin{aligned} u(x,y,0) &= \psi(x,y) \\ u_t(x,y,0) &= \varphi(x,y) \end{aligned} \qquad , \ (x,y) \in \Omega$$

نظراً لأهمية المعادلات التفاضلية الجزئية فإن البحث عن الخوارزميات العددية لحل هذه المعادلات يكون ذات أهمية نتيجة صعوبة إيجاد حلها التحليلي، وتعد طريقة الفروق النهائية من الطرق شائعة الاستخدام في حل المعادلات التفاضلية، كما تحضى طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً ADI بالاهتمام وذلك لفاعليتها لتقليل من المشاكل ثنائية البعد إلى أحادية البعد وبالتالي نحتاج إلى حل منظومة خطية ثلاثية الأقطار(استخدمت خوارزمية توماس Thomas Algorithm في حل المنظومة ثلاثية الأقطار) أي أننا من خلالها نحصل على عمليات حسابية بسيطة وسريعة بالإضافة لسهولة التطبيق .

حيث قام ليز (Lees) بصياغة طريقتين مختلفتين لمعادلة الموجة في بعدين باستخدام طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً ADI خوارزمية ليز الأولى وخوارزمية ليز الثانية، حيث أن كل من الخوارزميتين من الرتبة الثانية بالنسبة للمتغيرين الزمني والفضائي [4,5]، وأشار كل من ميتشل وفيرويذر (Mitchell & Fairweather) إلى أن خوارزميتي ليز الأولى والثانية هي حالة خاصة من خوارزمية الاتجاهات المتبادلة المعممة [1,5]، وهي خوارزمية من الرتبة الرابعة بالنسبة للمتغيرين الزمني والفضائي، مع وجود شرط استقرار لكل من خوارزميتي ليز والخوارزمية المعممة [1,4,5]
.

نقدم في البند الثاني اشتقاق طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً عن طريق تقسيم المشتقة الثانية بالنسبة للمتغير الزمني حيث تحصلنا على خوارزمية من الرتبة الثانية بالنسبة للمتغير الفضائي والزمني وإيجاد الخطأ المحلي للخوارزمية، وتحسين هذه الطريقة في البند الثالث باستخدام الفروق النهائية المدمجة والحصول على خوارزمية من الرتبة الرابعة بالنسبة للمتغير الفضائي والرتبة الثانية للمتغير الزمني بالإضافة لإيجاد الخطأ المحلي لهذه الخوارزمية، كما نقدم في البند الثالث الأمثلة العددية والنتائج المتحصل عليها .

2- طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً من الرتبة الثانية لمعادلة الموجة في بعدين :

The second-order ADI method for wave equation in two-dimension

في هذا البند نشتق طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً من الرتبة الثانية عن طريق تقسيم المشتقة الثانية للمتغير الزمني [5]لإيجاد الحل العددي لمعادلة الموجة الموضحة في المعادلة (1.1) .

بوضع $v=\frac{\partial u}{\partial t}$، يمكن كتابة المعادلة (1.1) على الصورة :

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \quad , \ a<x,y<b \quad ,t>0 \qquad (2.1)$$

$$v=\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \ a<x,y<b \quad ,t>0 \qquad (2.2)$$

مع الشروط الحدية :

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x(a,y,t)+\beta_1 u(a,y,t)&=f_1(y,t)\\ \alpha_2 u_x(b,y,t)+\beta_2 u(b,y,t)&=f_2(y,t)\\ \alpha_3 u_x(x,a,t)+\beta_3 u(x,a,t)&=g_1(x,t)\\ \alpha_4 u_x(x,b,t)+\beta_4 u(x,b,t)&=g_2(x,t)\end{aligned} \qquad (x,y)\in\Omega\,,t\geq 0$$

والشرطين الابتدائيين :

$$\begin{aligned} u(x,y,0)&=\psi(x,y)\\ v(x,y,0)&=\varphi(x,y)\end{aligned} \quad (x,y)\in\Omega \qquad \begin{aligned}&(2.3)\\&(2.4)\end{aligned}$$

بتقسيم المنطقة Ω إلى مجموعة من النقاط $x_i=ih\,,y_j=jh$ $(i,j=0,1,\dots,N)$ حيث $h=\frac{b-a}{N}$ (N عدد النقاط) ووضع $t^n=nk$ حيث $k=\Delta t$ تمثل مقدار الزيادة في المتغير الزمني t، وبتطبيق طريقة كرانك ونيكولسن (Crank-Nicolson) [5] على المعادلتين (2.1) و (2.2) نحصل على :

$$\frac{V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}}{k}-\frac{c^2}{h^2}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\left(\frac{U_{i,j}^{n+1}+U_{i,j}^{n}}{2}\right)=F_{i,j}^{n} \qquad (2.5)$$

$$\frac{V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}}{2}=\frac{U_{i,j}^{n+1}-U_{i,j}^{n}}{k} \qquad (2.6)$$

حيث $U_{i,j}^{n}=u(x_i,y_j,t^n)\,,V_{i,j}^{n}=v(x_i,y_j,t^n)\,,F_{i,j}^{n}=f(x_i,y_j,t^n)$ و

$\delta_x^2U_{i,j}^{n}=U_{i+1,j}^{n}-2U_{i,j}^{n}+U_{i-1,j}^{n}$ ، $\delta_y^2U_{i,j}^{n}=U_{i,j+1}^{n}-2U_{i,j}^{n}+U_{i,j-1}^{n}$

من المعادلة (2.6) نجد أن

$$U_{i,j}^{n+1}=\frac{k}{2}\left(V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}\right)+U_{i,j}^{n}$$

وبالتعويض بـ $U_{i,j}^{n+1}$ من المعادلة السابقة في المعادلة (2.5) نحصل على :

$$\frac{V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}}{k}-\frac{c^2}{2h^2}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\left(\frac{k}{2}\left(V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}\right)+2U_{i,j}^{n}\right)=F_{i,j}^{n}$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة :

$$V_{i,j}^{n+1}-\frac{s}{4}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}=V_{i,j}^{n}+\frac{s}{4}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{s}{k}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+kF_{i,j}^{n}$$

حيث $s=\frac{c^2k^2}{h^2}$، وبإضافة الحد $\frac{s^2}{16}\delta_x^2\delta_y^2\left(V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}\right)$ نحصل على :

$$V_{i,j}^{n+1}-\frac{s}{4}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}+\frac{s^2}{16}\delta_x^2\delta_y^2\left(V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}\right)=V_{i,j}^{n}+\frac{s}{4}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{s}{k}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+kF_{i,j}^{n}$$

بالتالي

$$V_{i,j}^{n+1}-\frac{s}{4}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}+\frac{s^2}{16}\delta_x^2\delta_y^2V_{i,j}^{n+1}=$$
$$V_{i,j}^{n}+\frac{s}{4}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{s^2}{16}\delta_x^2\delta_y^2V_{i,j}^{n}+\frac{s}{k}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+kF_{i,j}^{n}$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة :

$$\left(1-\frac{s}{4}\delta_x^2\right)\left(1-\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{s}{4}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{s}{k}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+kF_{i,j}^{n} \qquad (2.7)$$

بالتالي نتحصل على الطريقة الحالية للاتجاهات المتبادلة ضمنياً نرمز لها بالرمز PR ADI (Present ADI) :

$$\left(1-\frac{s}{4}\delta_x^2\right)V_{i,j}^{*}=\left(1+\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{1}{2k}\left(4+s\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+\frac{k}{2}F_{i,j}^{n}$$
$$\left(1-\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{s}{4}\delta_x^2\right)V_{i,j}^{*}-\frac{1}{2k}\left(4-s\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+\frac{k}{2}F_{i,j}^{n}$$
$$U_{i,j}^{n+1}=\frac{k}{2}\left(V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}\right)+U_{i,j}^{n}$$

وبإيجاد مفكوك تيلور لكل حد في المعادلة(2.7) وتجميع الحدود نتحصل على الخطأ المحلي، على الصورة :

$$\tau = k^2\left(\frac{c^2}{24}(u_{txx}+u_{tyy}) - \frac{c^4}{8}(u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}) + \frac{k^4}{16}u_{txxyy}\right) - \frac{h^2c^2}{12}(u_{xxxx}+u_{yyyy}) + O(k^4+k^2h^2+h^4)$$

أي أن الخوارزمية من الرتبة الثانية بالنسبة للمتغير الزمني والفضائي $O(k^2,h^2)$.

3- الطريقة العامة للاتجاهات المتبادلة ضمنياً لمعادلة الموجة في بعدين :

The General ADI method for wave equation in two-dimension

في هذا القسم نقوم بتعميم الطريقة السابقة (طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً من الرتبة الثانية) لإيجاد الحل العددي لمعادلة الموجة،

لتكن

$$M_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad M_y = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

فإن المعادلة (2.1) يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2(M_x+M_y) + f(x,y,t) \qquad (3.1)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3.2)$$

$$M_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.3)$$

$$M_y = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (3.4)$$

باستخدام الفروق النهائية المدمجة من الرتبة الرابعة للمعادلتين (3.3),(3.4) نجد أن : [2,3,6]

$$\frac{1}{12}(M_x)_{i+1,j}^n + \frac{5}{6}(M_x)_{i,j}^n + \frac{1}{12}(M_x)_{i-1,j}^n = \frac{1}{h^2}\delta_x^2 U_{i,j}^n \qquad (3.5)$$

$$\frac{1}{12}(M_y)_{i,j+1}^n + \frac{5}{6}(M_y)_{i,j}^n + \frac{1}{12}(M_y)_{i,j-1}^n = \frac{1}{h^2}\delta_y^2 U_{i,j}^n \qquad (3.6)$$

حيث $\delta_x^2 U_{i,j}^n = U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n$ و $\delta_y^2 U_{i,j}^n = U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n$، لتكن :

$$A_x(M_x)_{i,j}^n = \frac{1}{12}(M_x)_{i+1,j}^n + \frac{5}{6}(M_x)_{i,j}^n + \frac{1}{12}(M_x)_{i-1,j}^n$$

$$A_y(M_y)_{i,j}^n = \frac{1}{12}(M_y)_{i,j+1}^n + \frac{5}{6}(M_y)_{i,j}^n + \frac{1}{12}(M_y)_{i,j-1}^n$$

وبتطبيق طريقة كرانك ونيكولسون (Crank-Nicolson) [4] على المعادلتين (3.1) و (3.2) نجد أن :

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{k} - c^2\left(\frac{(M_x)_{i,j}^{n+1} + (M_x)_{i,j}^n}{2} + \frac{(M_y)_{i,j}^{n+1} + (M_y)_{i,j}^n}{2}\right) = F_{i,j}^n \qquad (3.7)$$

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j}^n}{2} = \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \qquad (3.8)$$

بضرب المعادلة (3.7) في kA_xA_y وإعادة ترتيب المعادلة (3.8) نجد أن :

$$A_xA_y\left(V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}\right)=\frac{c^2k}{2}\left(A_yA_x\left((M_x)_{i,j}^{n+1}+(M_x)_{i,j}^{n}\right)+A_xA_y\left(\left(M_y\right)_{i,j}^{n+1}+\left(M_y\right)_{i,j}^{n}\right)\right)+kA_xA_yF_{i,j}^{n} \quad (3.9)$$

$$U_{i,j}^{n+1}=\frac{k}{2}\left(V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}\right)+U_{i,j}^{n} \quad (3.10)$$

حيث $A_xU_{i,j}^{n}=\left(1+\frac{1}{12}\delta_x^2\right)U_{i,j}^{n}$ و $A_yU_{i,j}^{n}=\left(1+\frac{1}{12}\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}$، بإعادة ترتيب المعادلة (3.9) نجد أن :

$$A_xA_y\left(V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}\right)$$
$$=\frac{s}{2k}A_y\left(\delta_x^2U_{i,j}^{n+1}+\delta_x^2U_{i,j}^{n}\right)+\frac{s}{2k}A_x\left(\delta_y^2U_{i,j}^{n+1}+\delta_y^2U_{i,j}^{n}\right)\ +\ kA_xA_yF_{i,j}^{n}$$

بتعوض عن $U_{i,j}^{n+1}$ (المعادلة (3.10)) في المعادلة السابقة نجد أن :

$$A_xA_y\left(V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}\right)=\frac{s}{4}\left(A_y\delta_x^2+A_x\delta_y^2\right)\left(V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}\right)+\frac{s}{k}\left(A_y\delta_x^2+A_x\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}\ +\ kA_xA_yF_{i,j}^{n}$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة نحصل على :

$$\left(A_xA_y-\frac{s}{4}\left(A_y\delta_x^2+A_x\delta_y^2\right)\right)V_{i,j}^{n+1}=\left(A_xA_y+\frac{s}{4}\left(A_y\delta_x^2+A_x\delta_y^2\right)\right)V_{i,j}^{n}+\frac{s}{k}\left(A_y\delta_x^2+A_x\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}\ +\ kA_xA_yF_{i,j}^{n}$$

بإضافة الحد $\frac{s^2}{16}\delta_x^2\delta_y^2\left(V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}\right)$ نجد أن :

$$\left(A_x-\frac{s}{4}\delta_x^2\right)\left(A_y-\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}=\left(A_x+\frac{s}{4}\delta_x^2\right)\left(A_y+\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{s}{k}\left(A_y\delta_x^2+A_x\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}\ +\ kA_xA_yF_{i,j}^{n} \quad (3.11)$$

بالتالي نتحصل على الطريقة العامة باستخدام الفـروق النهائية المدمجة للاتجاهات المتبادلة ضمنياً، نرمز لها بـالرمز GPR ADI (General Present ADI) :

$$\left(A_x-\frac{s}{4}\delta_x^2\right)V^*=\left(A_y+\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n}+\frac{1}{2k}\left(4A_y+s\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+\frac{k}{2}A_yF_{i,j}^{n}$$
$$\left(A_y-\frac{s}{4}\delta_y^2\right)V_{i,j}^{n+1}=\left(A_x+\frac{s}{4}\delta_x^2\right)V^*-\frac{1}{2k}\left(4A_y-s\delta_y^2\right)U_{i,j}^{n}+\frac{k}{2}A_yF_{i,j}^{n}$$
$$U_{i,j}^{n+1}=\frac{k}{2}\left(V_{i,j}^{n+1}+V_{i,j}^{n}\right)+U_{i,j}^{n}$$

عن طريق إيجاد مفكوك تيلور لكل حد في المعادلة(3.11) وبتجميع الحدود نحصل على الخطأ المحلي، على الصورة :

$$\tau=k^2\left(\frac{c^2}{24}A_xA_y\left(u_{txx}+u_{tyy}\right)-\frac{c^4}{8}\left(A_yu_{xxxx}+\left(A_x+A_y\right)u_{xxyy}+A_xu_{yyyy}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{k^4c^4}{16}u_{txxyy}-\frac{h^4c^2}{240}\left(A_yu_{xxxxxx}+A_xu_{yyyyyy}\right)\right)+O\left(k^4+k^2h^4+h^6\right)$$

أي أن الخوارزمية من الرتبة الثانية بالنسبة للمتغير الزمني والرابعة بالنسبة للمتغير الفضائي $O(k^2,h^4)$.

4- التطبيق العددي :

في هذا القسم نقدم مثالين لتوضيح فاعلية الطريقتين PR ADI وGPR ADI، ونقارن النتائج المتحصل عليها من طريقة PR مع طريقتي ليز الأولى والثاينة للاتجاهات المتبادلة ضمنياً من الدرجة الثانية، وطريقة GPR مع الطريقة المعممة من الدرجة الرابعة .

- طريقة ليز (Lees) الأولى للاتجاهات المتبادلة ضمنياً (نرمز لها بالرمز L1):[4,5]

$$(1-\theta s\delta_x^2)u_{i,j}^* = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + s\delta_x^2\left[(1-2\theta)u_{i,j}^n + \theta u_{i,j}^{n-1}\right] + s\delta_y^2\left[(1-2\theta)u_{i,j}^n + 2\theta u_{i,j}^{n-1}\right] + k^2F_{i,j}^n \qquad (4.1)$$

$$(1-\theta s\delta_y^2)u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \theta s\delta_y^2 u_{i,j}^{n-1} \qquad (4.2)$$

- طريقة ليز (Lees) الثانية للاتجاهات المتبادلة ضمنياً (نرمز لها بالرمز L2) : [4,5]

$$(1-\theta s\delta_x^2)u_{i,j}^* = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + s\delta_x^2\left[(1-2\theta)u_{i,j}^n + \theta u_{i,j}^{n-1}\right] + s\delta_y^2 u_{i,j}^n + k^2F_{i,j}^n \qquad (4.3)$$

$$(1-\theta s\delta_y^2)u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \theta s\delta_y^2(2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}) \qquad (4.4)$$

- طريقة الاتجاهات المتبادلة ضمنياً المعممة (نرمز لها بالرمز G):[1,4,5]

$$\left(1+\frac{1-s}{12}\delta_x^2\right)u_{i,j}^* = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} - \frac{1-s}{12}\delta_x^2\left[u_{i,j}^{n-1} - \frac{2(1+5s)}{1-s}u_{i,j}^n\right] - s\frac{1+s}{1-s}\delta_y^2 u_{i,j}^n + k^2F_{i,j}^n \qquad (4.5)$$

$$\left(1+\frac{1-s}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \frac{1-s}{12}\delta_y^2\left[u_{i,j}^{n-1} - \frac{2(1+10s+s^2)}{(1-s)^2}u_{i,j}^n\right] \qquad (4.6)$$

مثال 1:

لتكن $c^2 = 1$ و $F = 0$ في المعادلة (1.1) مع الشرطين الابتدائيين $u(x,y,0) = xy(1-x)(1-y)$ ، $u_t(x,y,0) = 0$ لكل $0 \le x,y \le 1$، والشروط الحدية

$$\begin{aligned} u(0,y,t) &= 0 \\ u(1,y,t) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad 0 \le y \le 1\,, t \ge 0$$

$$\begin{aligned} u(x,0,t) &= 0 \\ u(x,1,t) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad 0 \le x \le 1\,, t \ge 0$$

الحل الفعلي للمسألة هو :

$$u(x,y,t) = \frac{64}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3(2m-1)^3}\sin((2n-1)\pi x)\sin((2m-1)\pi y)\cos\left(\pi\sqrt{(2n-1)^2+(2m-1)^2}\,t\right)$$

الجدول 1 يوضح الحل عندما $h = 0.04$ و $k = h$، نجد أن النظيم الثاني $\boldsymbol{L^2}$**–norm** للأخطاء الناتجة عند التقدم في الزمن تكون أصغر في طريقتي $\boldsymbol{PR}$ و **GPR** من طريقتي **L1** و **L2** أي أن طريقتي $\boldsymbol{PR}$ و **GPR** أدق في النتائج، كما نلاحظ أن طريقة **G** تفشل نظراً لأن $s = 1$ لا تحقق شرط الاستقرار لها بحيث تكون $\frac{ck}{h} < \sqrt{3} - 1$ (أنظر [1,4])

.

$t = 2$	$t = 1$	L^2–norm / الطريقة
1.360291×10^{-3}	6.670647×10^{-4}	$\theta = 0.5$; L1
1.286439×10^{-3}	6.836134×10^{-4}	$\theta = 0.5$; L2
3.242404×10^{-4}	1.686385×10^{-4}	PR
2.005170×10^{-4}	1.054835×10^{-4}	GPR
$-$	$-$	G

جدول 1 يوضح الحل باستخدام خوارزميات الاتجاهات المتبادلة ضمنياً عندما $h = 0.04$ و $k = h$

الجدول2 يوضح الحل عندما $h = 0.04$ و $k = 0.01$، نجد أن الأخطاء الناتجة من طريقة PR أقل من طريقتي **L1** و **L2** أو أنها قد تتساوى، كما نجد أن كل من **GPR** و **G** كانت لهما نفس الدقة .

$t = 2$	$t = 1$	$t = 0.5$	$t = 0.25$	L^2–norm / الطريقة
5.628348×10^{-5}	2.252394×10^{-5}	1.167068×10^{-5}	2.491019×10^{-6}	$\theta = 0.5$; L1
5.618219×10^{-5}	2.256263×10^{-5}	1.164043×10^{-5}	2.486451×10^{-6}	$\theta = 0.5$; L2
4.048471×10^{-5}	1.486836×10^{-5}	8.571768×10^{-6}	1.822754×10^{-6}	PR
1.648356×10^{-6}	7.988048×10^{-7}	4.764840×10^{-7}	1.670124×10^{-7}	GPR
4.398217×10^{-6}	1.804839×10^{-7}	1.389202×10^{-7}	9.323323×10^{-7}	G

جدول 2 يوضح الحل باستخدام خوارزميات الاتجاهات المتبادلة ضمنياً عندما $h = 0.04$ و $k = 0.01$

مثال2 :

لتكن $c^2 = \frac{1}{68}$ و $F = 0$ في المعادلة (1.1) مع الشرطين الابتدائيين $u(x,y,0) = sin(2\pi x)\, sin(\frac{\pi y}{2})$ ، $u_t(x,y,0) = 0$ لكل $0 \le x,y \le 1$، والشروط الحدية

$$\begin{matrix} u(0,y,t) = 0 \\ u(1,y,t) = 0 \end{matrix} \quad , \quad 0 \le y \le 1\, , t \ge 0$$

$$\begin{matrix} u(x,0,t) = 0 \\ u_y(x,1,t) = 0 \end{matrix} \quad , \quad 0 \le x \le 1\, , t \ge 0$$

الحل الفعلي للمسألة هو $sin(2\pi x)\, sin(\frac{\pi y}{2}) \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$.

الجدول3 يوضح الحل عندما $h = 0.04$ و$k = h$، نجد أن كل من $\boldsymbol{PR}$ و **L1** و **L2** لها نفس درجة الدقة، كذلك طريقتي **GPR** و **G** .

$t = 2$	$t = 1$	L^2–norm / الطريقة
2.888442×10^{-3}	3.589426×10^{-4}	$\theta = 0.5\,;\,L1$
2.888443×10^{-3}	3.589426×10^{-4}	$\theta = 0.5\,;\,L2$
2.640523×10^{-3}	3.294018×10^{-4}	$\boldsymbol{PR}$
3.253422×10^{-6}	4.066491×10^{-7}	$\boldsymbol{GPR}$
1.181604×10^{-6}	5.116351×10^{-7}	$\boldsymbol{G}$

جدول 3 يوضح الحل باستخدام خوارزميات الاتجاهات المتبادلة ضمنياً عندما $h = 0.04$ و$k = h$

الجدول4 يوضح الحل عندما $h = 0.04$ و$k = 0.01$، نجد أن كل من $\boldsymbol{PR}$ و **L1** و **L2** لها نفس درجة الدقة، كما نجد أن طرقة **GPR** ذات مقدار خطأ أقل من طريقة **G** وبالتالي تكون طريقة **GPR** أدق في النتائج العددية .

$t = 2$	$t = 1$	$t = 0.5$	$t = 0.25$	L^2–norm / الطريقة
2.500555×10^{-3}	3.119381×10^{-4}	2.282906×10^{-5}	1.482762×10^{-6}	$\theta = 0.5\,;\,L1$
2.500555×10^{-3}	3.119381×10^{-4}	2.282906×10^{-5}	1.482762×10^{-6}	$\theta = 0.5\,;\,L2$
2.485397×10^{-3}	3.100686×10^{-4}	2.269506×10^{-5}	1.474421×10^{-6}	$\boldsymbol{PR}$
6.760480×10^{-8}	8.450514×10^{-9}	6.18773×10^{-10}	4.02035×10^{-11}	$\boldsymbol{GPR}$
1.636145×10^{-7}	5.312181×10^{-8}	1.203575×10^{-8}	2.714181×10^{-9}	$\boldsymbol{G}$

جدول 4 يوضح الحل باستخدام خوارزميات الاتجاهات المتبادلة ضمنياً عندما $h = 0.04$ و$k = 0.01$

ملاحظة : إستخدمنا طريقة فصل المتغيرات في إيجاد الحل الفعلي وإيجاد النتائج العددية باستخدام برنامج الماتلاب .

الاستنتاج :

نستنتج أن الطريقتين **PR** و **GPR** للاتجاهات المتبادلة ضمنياً تتميز باستقرارها غير المشروط، وبتطوير طريقة **PR** باستخدام الفروق النهائية المدمجة نتحصل على طريقة **GPR** التي تعطي نتائج عددية ذات دقة أفضل من باقي الطرق المذكورة (طريقتي ليز الأولى والثانية والطريقة المعممة) وتكلفة أقل في العمليات الحسابية .

المراجع :

1-Fairweather.G AND A.R.Mitchell . A High Accuracy Alternating Direction Method for the Wave Equation,J.Inst.Maths Applics 1(1965)309-316.

2-Jichun Li, Y. C. High-Order Compact ADI methods for parabolic equation,Comput .Math .Appl.52(2006)1343-1356.

3-K.Lele,S.Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution,J.comput.phys. 103(1992)16-42.

4- Lees, M. (1962). Alternating Direction Methods for Hyperbolic Differential Equations. J. Society for Industrial and Applied Mathematics ,vol 10

5- Leon Lapidusl, G.Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering,John Wiley & sons.(1999).

6-Weizhong Dai, R. N. Compact ADI Method for Solving Parabolic Differential Equations,Wiley Periodicals ,Inc(2002)129-142.

Alternating Direction Implicit method by Compact finite difference for solve wave equation

Ghada Saleh Eshtewi
Mathematics Department, College of Science, Misurata University
g.eshtewi@sci.misuratau.edu.ly

Abstract:

In this paper the Alternating Direction Implicit method ADI is studied using the idea of dividing the derivative for the time variable in the two-dimensional wave equation, where developed this method by approximating the second derivative for the space variable using the Compact finite difference of the fourth order and obtaining an algorithm of the fourth order for the space variable and the second order for the time variable, as well as both methods can be generalized to the three-dimensional wave equation, Finally we presented numerical examples where the results obtained were of good accuracy compared to the exact solution, and compared the results obtained with the results of the first and second Lazy methods and the generalized alternating direction implicit method .

Keywords: Alternating Direction Implicit - Compact finite difference – wave equation